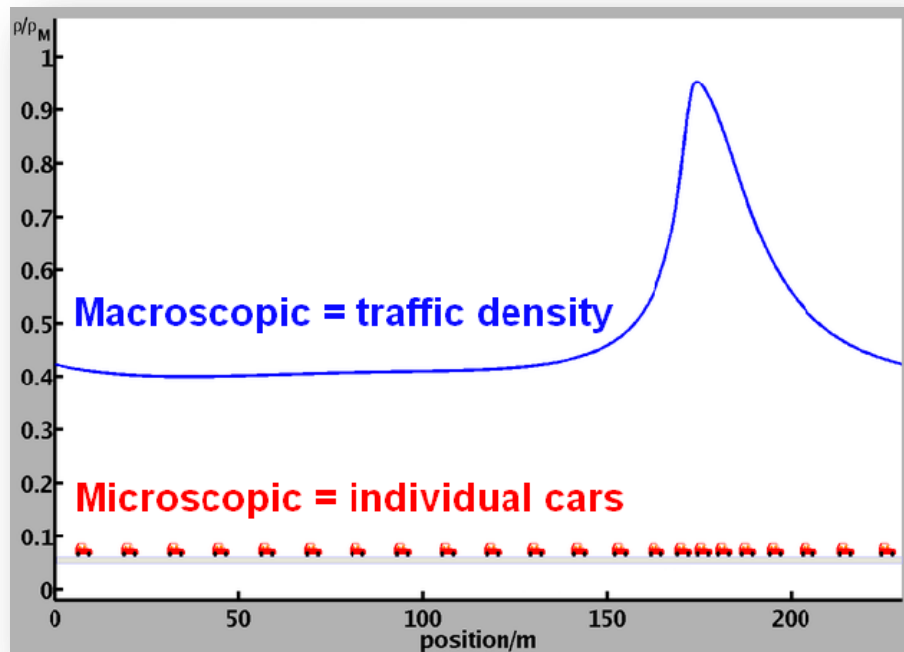


# Modelowanie zjawisk kolektywnych

Modele ruchu drogowego

dr hab. Piotr Fronczak

- Podejście makroskopowe
  - Modele pól prędkości (równania różniczkowe cząstkowe)
- Podejście mikroskopowe
  - Modele dyskretne (automaty komórkowe)
  - Modele ciągłe (równania ruchu)



## Podejście makroskopowe

Funkcja gęstości pojazdów

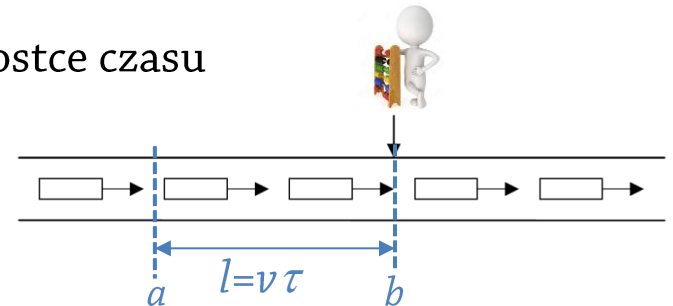
$$\rho(x, t)$$

Liczba pojazdów między punktem  $a$  i  $b$

$$N(t) = \int_a^b \rho(x, t) dx$$

Strumień – liczba pojazdów mijająca dany punkt w jednostce czasu

$$f = \frac{N}{\tau} = \frac{\rho l}{\tau} = \rho \cdot v$$



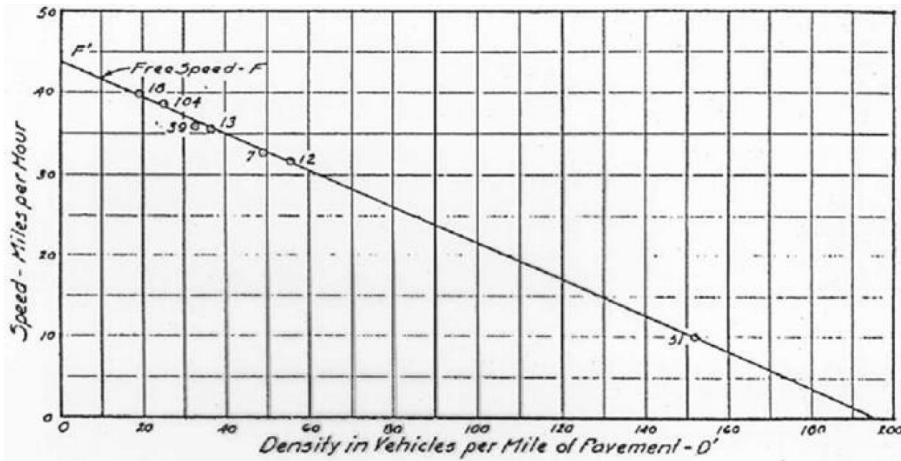
Zmiana liczby pojazdów spowodowana jest różnicą strumieni wpływających przez punkt  $a$  i wypływających przez punkt  $b$ :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^b \rho dx = \int_a^b \rho_t dx = f(a) - f(b) = - \int_a^b f_x dx$$

Równanie ciągłości

$$\rho_t + f_x = 0$$

– zasada zachowania ilości pojazdów

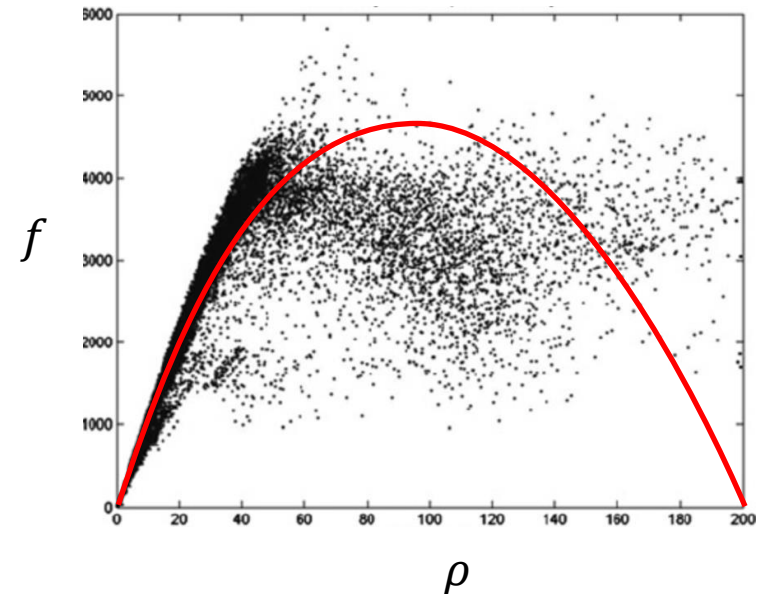


Bruce Greenshields - 1935

$$v = F(\rho) = v_{max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right)$$

$$f = G(\rho) = \rho v = v_{max} \left( \rho - \frac{\rho^2}{\rho_{max}} \right)$$

Diagram fundamentalny

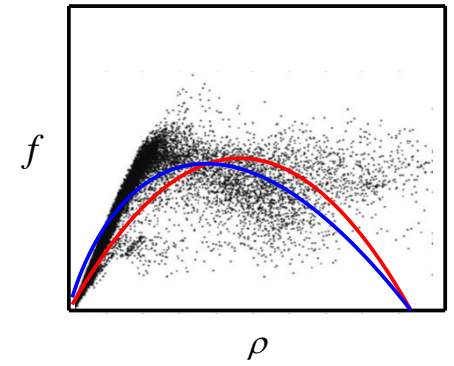
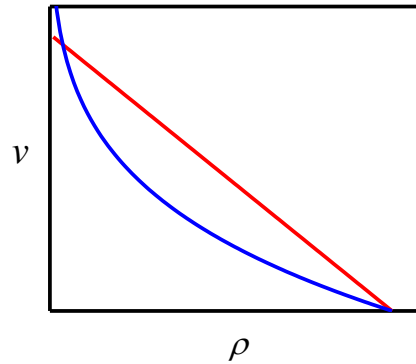


Bruce D. Greenshields  
 A study of highway capacity  
*Proceedings Highway Research Record*, vol. 14, pp. 448-477 (1935).

## Różne propozycje

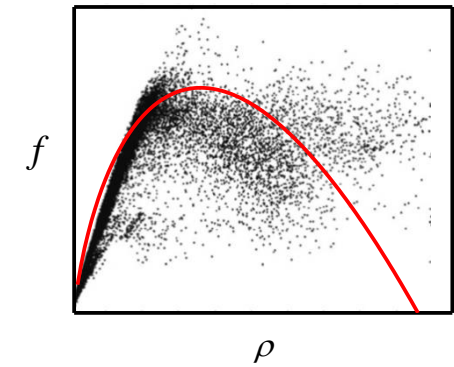
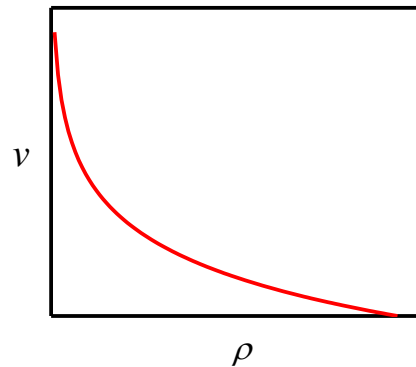
Pipes

$$v = v_{max} \left( 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^\beta \right)$$



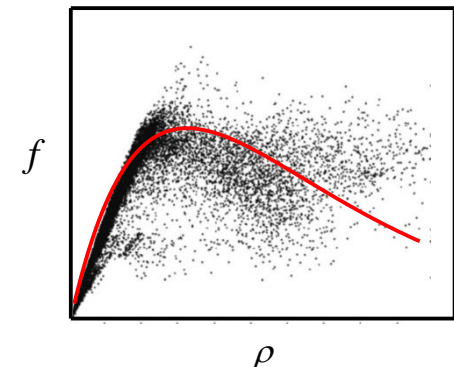
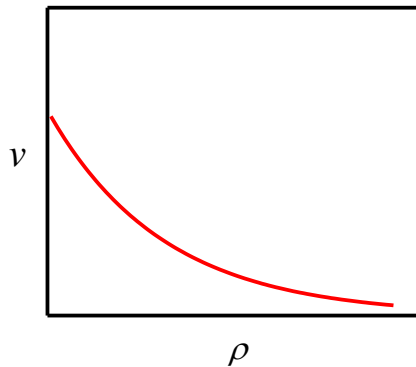
Greenberg

$$v = v_{max} \ln \frac{\rho_{max}}{\rho}$$



Underwood

$$v = v_{max} e^{-\frac{\rho}{\rho_{max}}}$$



## Model I rzędu - Lighthill-Whitham-Richards (LWR)

Prędkość w punkcie  $x$  jest funkcją gęstości w punkcie  $x$

$$f = \rho \cdot v(\rho) = v_{max} \left( \rho - \frac{\rho^2}{\rho_{max}} \right)$$

Na przykład,  
przy propozycji  
Greenshieldsa.

$$\rho_t + f_x = 0$$

$$\rho_t + f_\rho \rho_x = 0 \quad \text{hiperboliczne równanie cząstkowe}$$

## Modele II rzędu

inercja – pojazdy dostosowują prędkość z opóźnieniem

$$\rho_t + f_\rho \rho_x + T \rho_{tt} - D \rho_{xx} = 0$$

dyfuzja – pojazdy reagują na nielokalne zmiany gęstości

## Model LWR

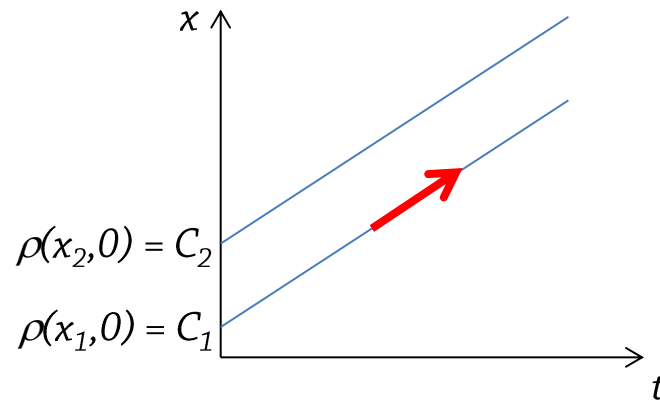
$$\rho_t + f_\rho \rho_x = 0$$

### Metoda charakterystyk

$$[1, f'] \cdot \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = 0$$

$$[1, f'] \cdot \nabla \rho = 0$$

Pochodna kierunkowa funkcji  $\rho$  w kierunku wektora  $[1, f']$  jest równa zero. Funkcja  $\rho$  musi być stała wzdłuż linii równoległych do  $[1, f']$ .

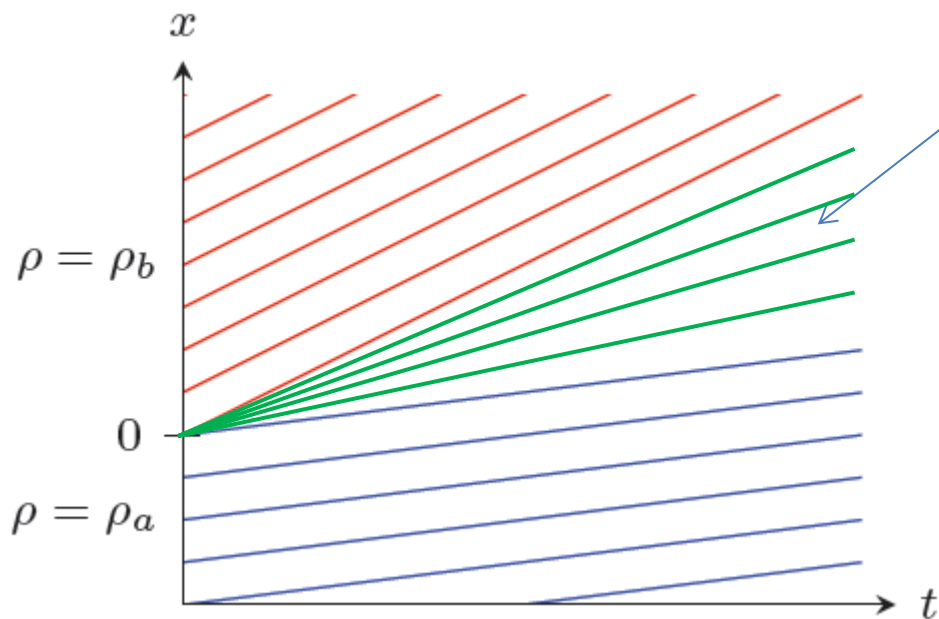
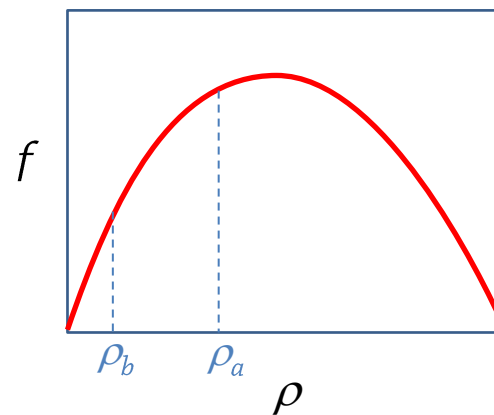
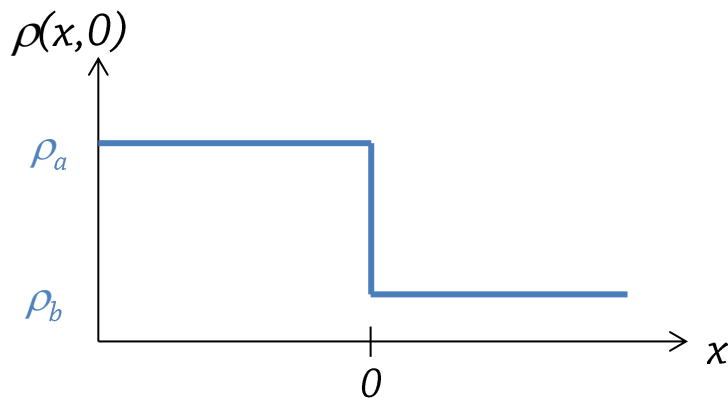


Równanie prostych  $x = f' \cdot t + C$

Zatem  $\rho$  jest pewną funkcją  $C$ :  $\rho = F(x - f'(\rho) \cdot t)$  ← funkcja falowa

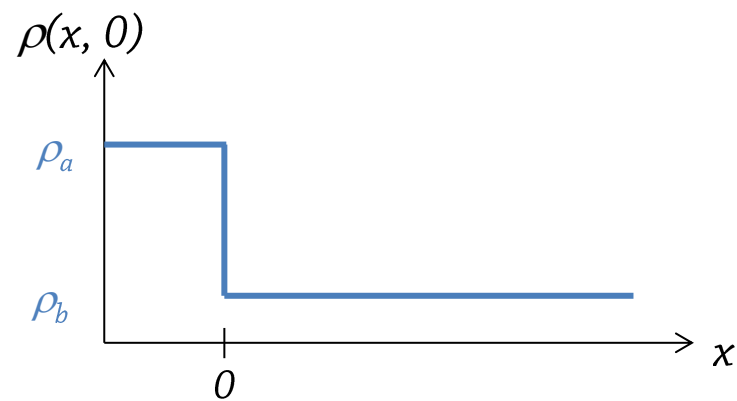
Nachylenie prostych można wyznaczyć z danych początkowych  $\rho = \rho(x, 0)$

Przypadek I:  $f'(\rho_a) < f'(\rho_b)$



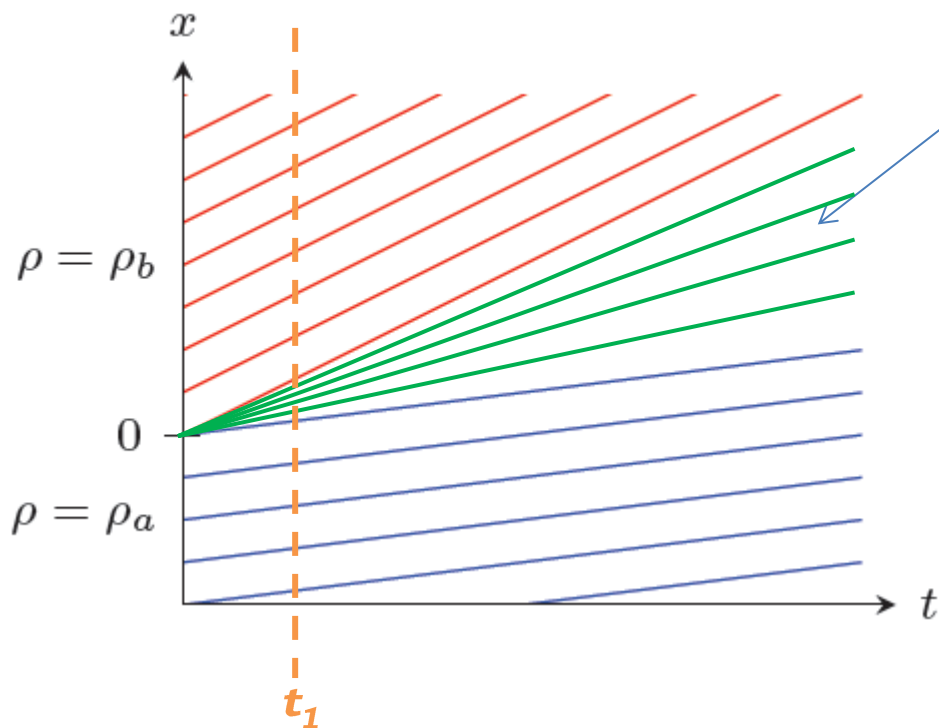
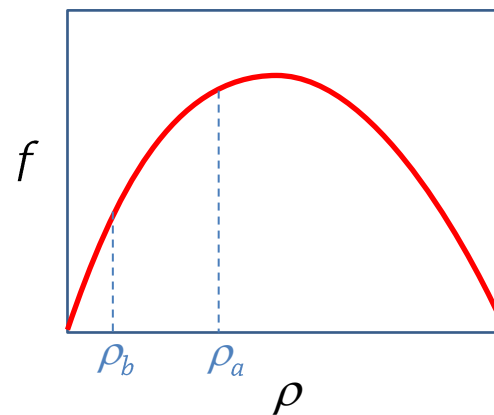
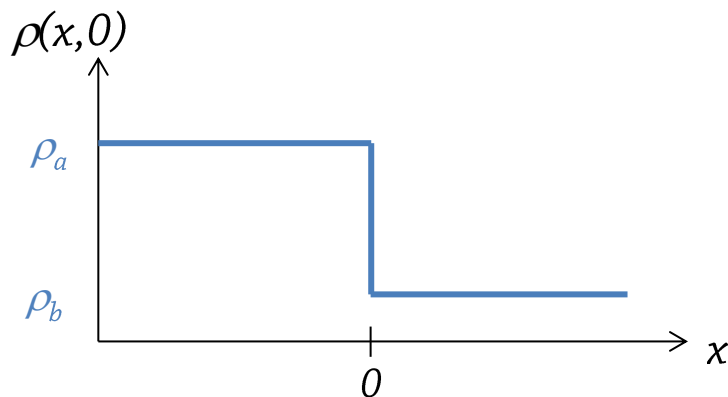
brak linii w tym obszarze

ale dla  $C=0$   $f'(\rho) = \frac{x}{t}$

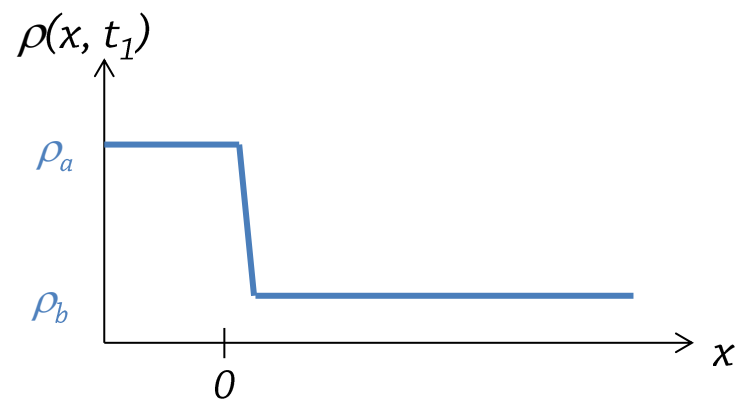




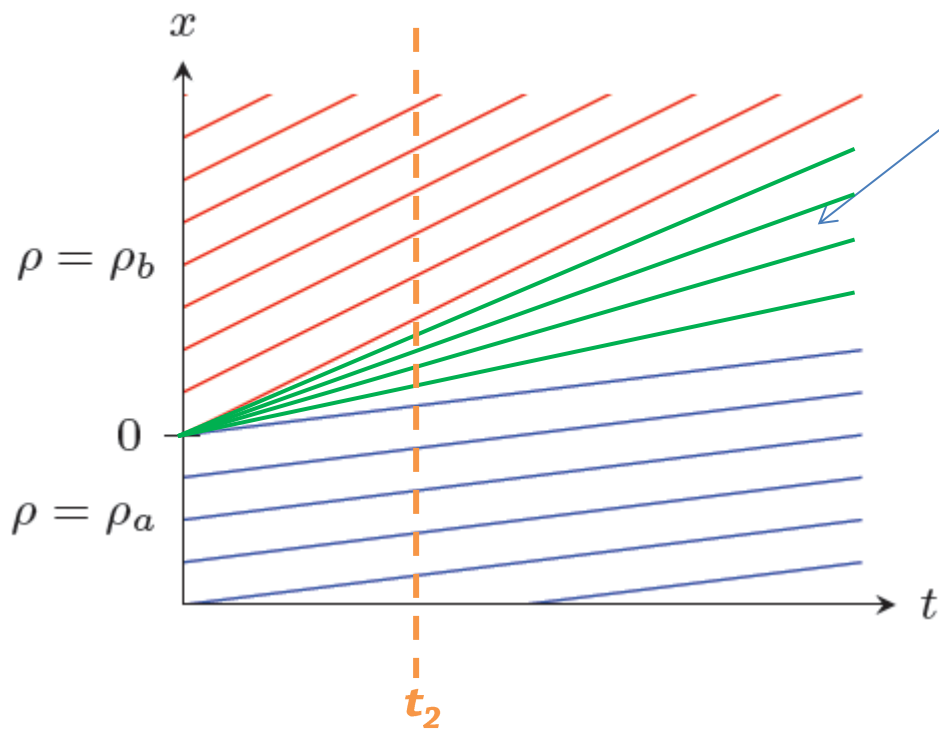
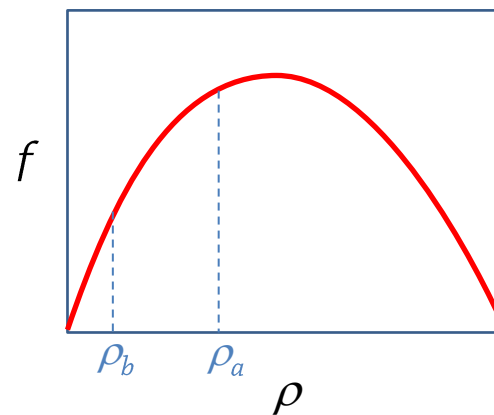
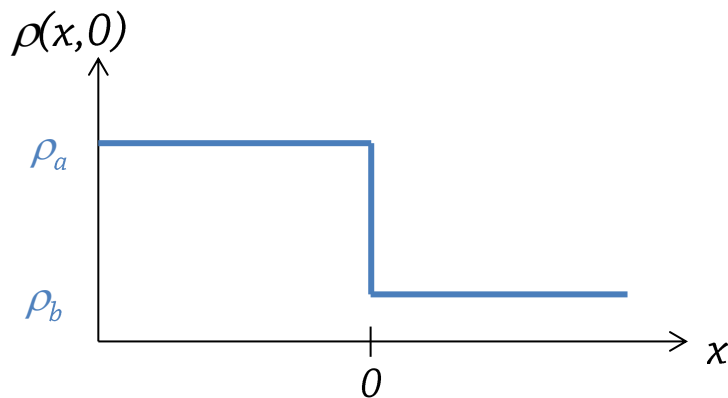
Przypadek I:  $f'(\rho_a) < f'(\rho_b)$



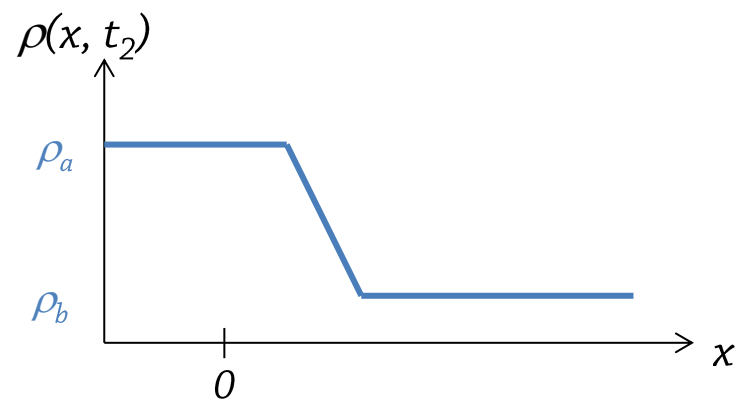
brak linii w tym obszarze  
ale dla  $C=0$   $f'(\rho) = \frac{x}{t}$



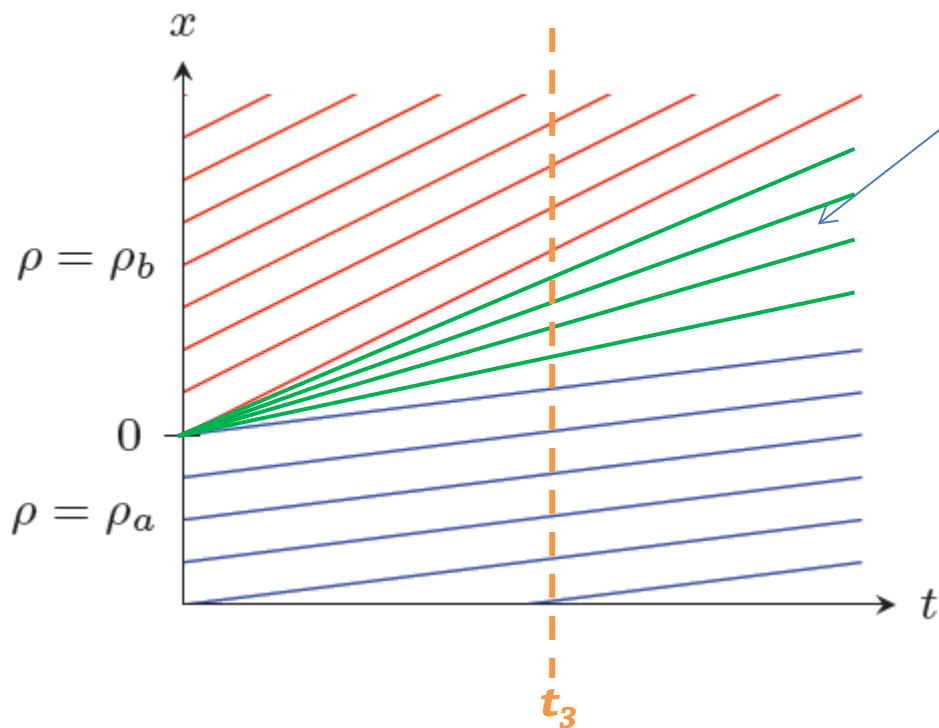
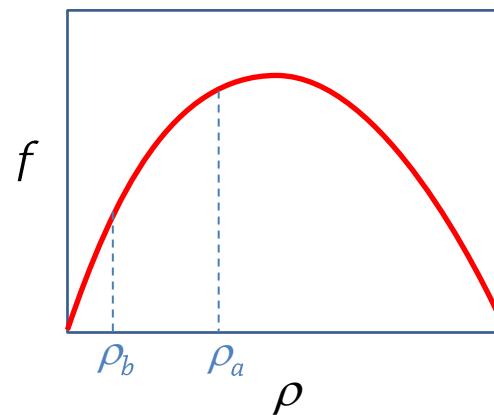
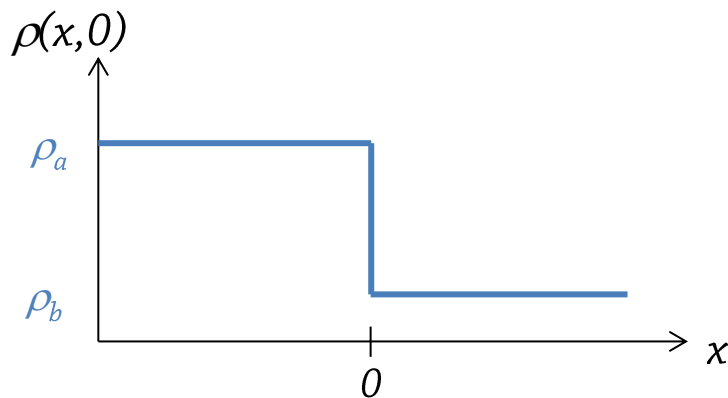
Przypadek I:  $f'(\rho_a) < f'(\rho_b)$



brak linii w tym obszarze  
ale dla  $C=0$   $f'(\rho) = \frac{x}{t}$



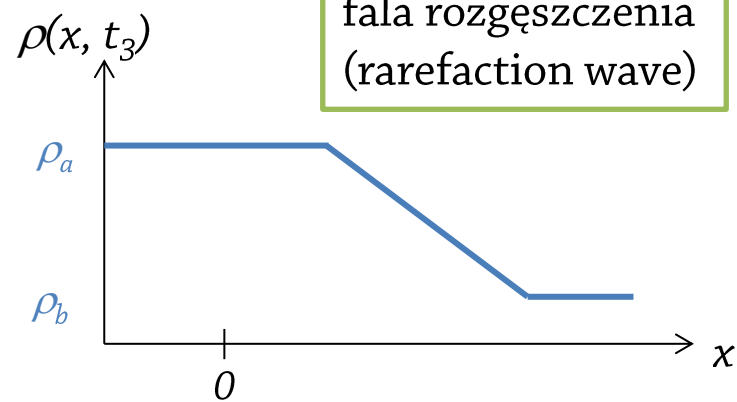
Przypadek I:  $f'(\rho_a) < f'(\rho_b)$



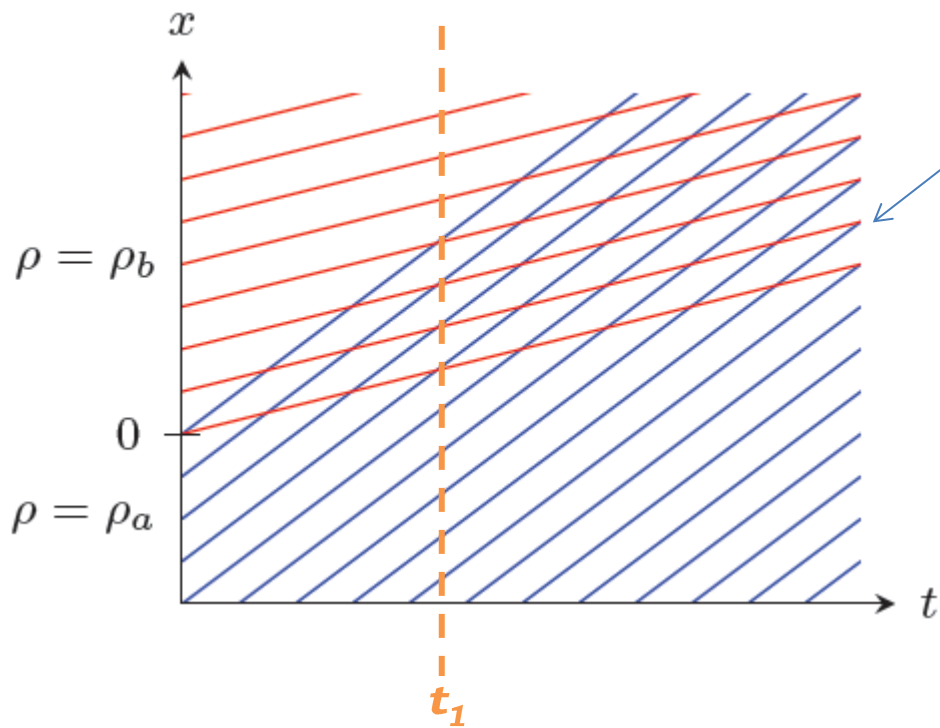
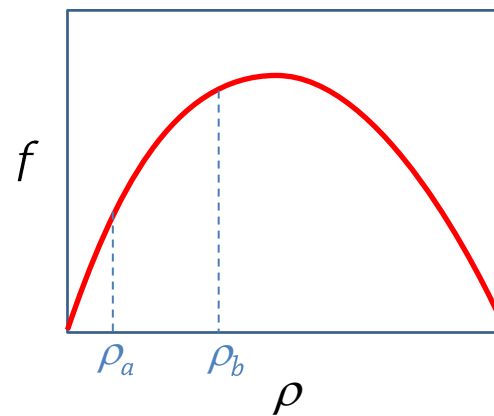
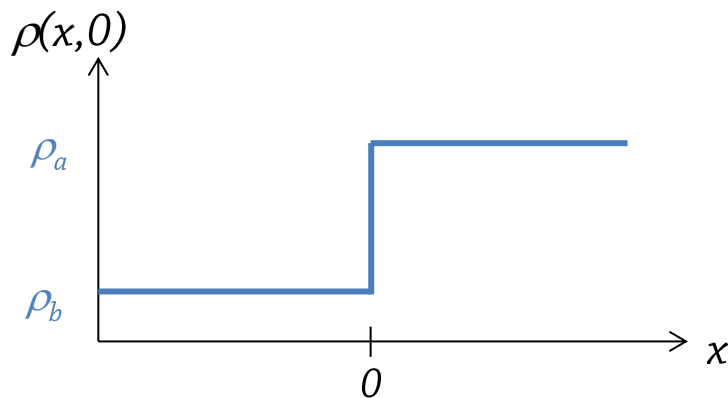
brak linii w tym obszarze

ale dla  $C=0$   $f'(\rho) = \frac{x}{t}$

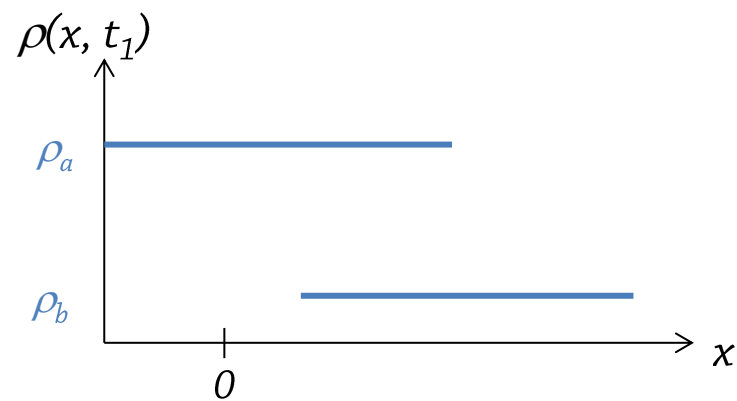
fala rozgęszczenia  
(rarefaction wave)



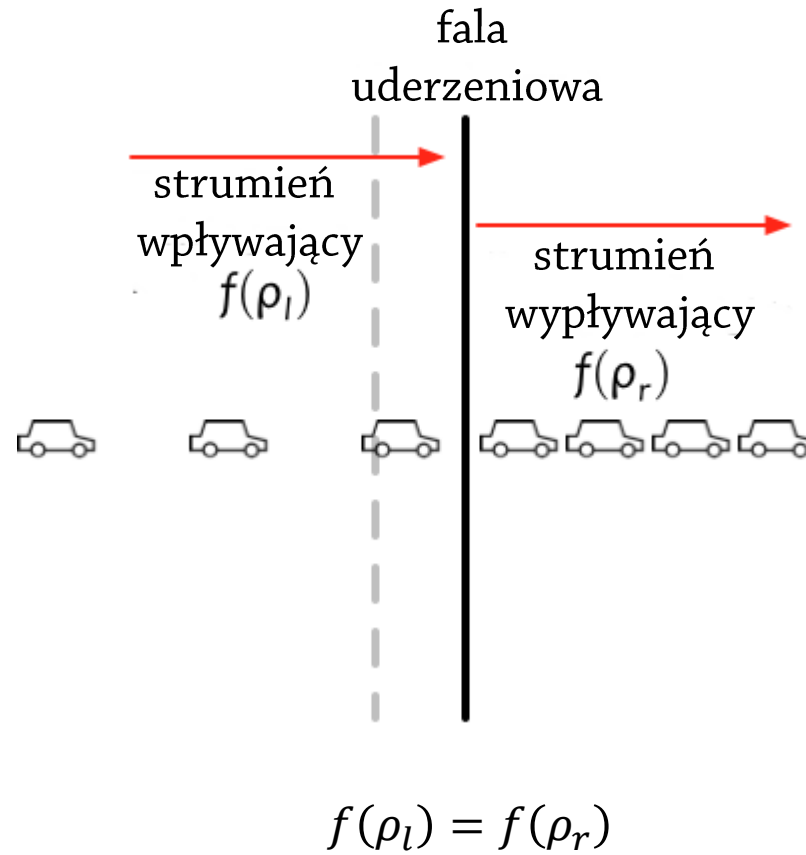
Przypadek II:  $f'(\rho_a) > f'(\rho_b)$



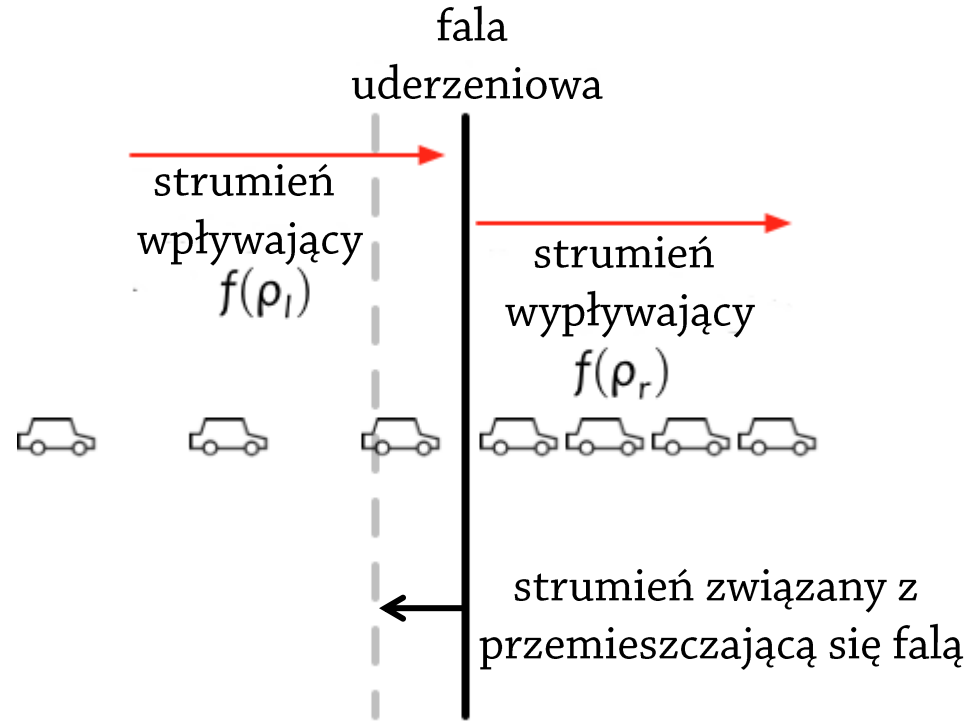
Rozwiązania wielowartościowe



Założmy, że fala uderzeniowa się nie porusza.



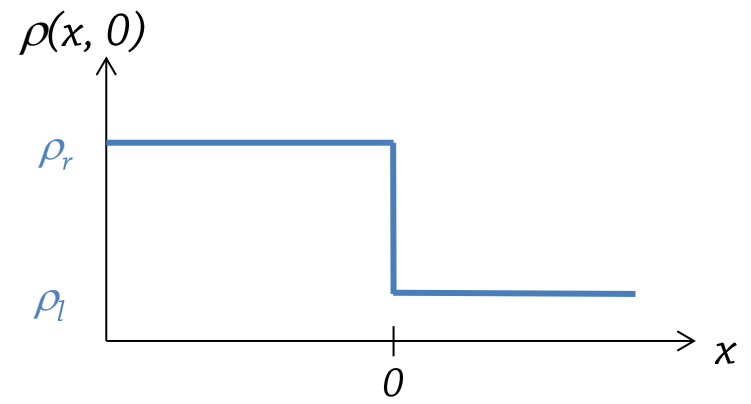
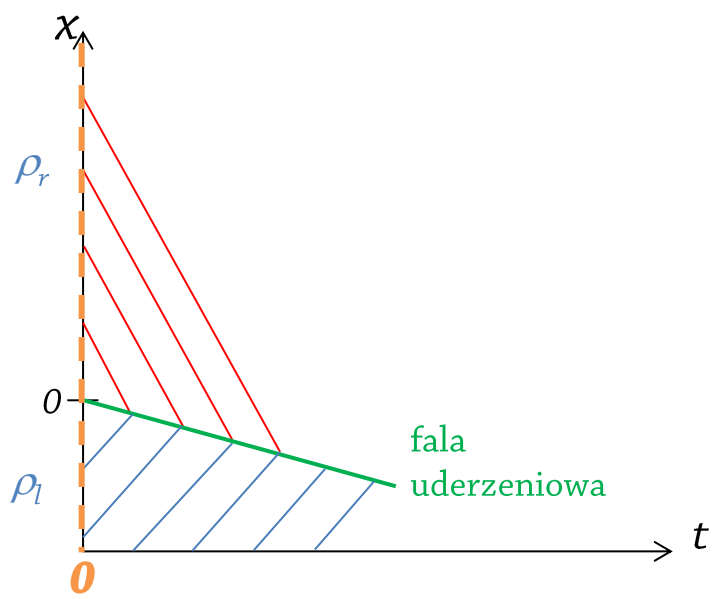
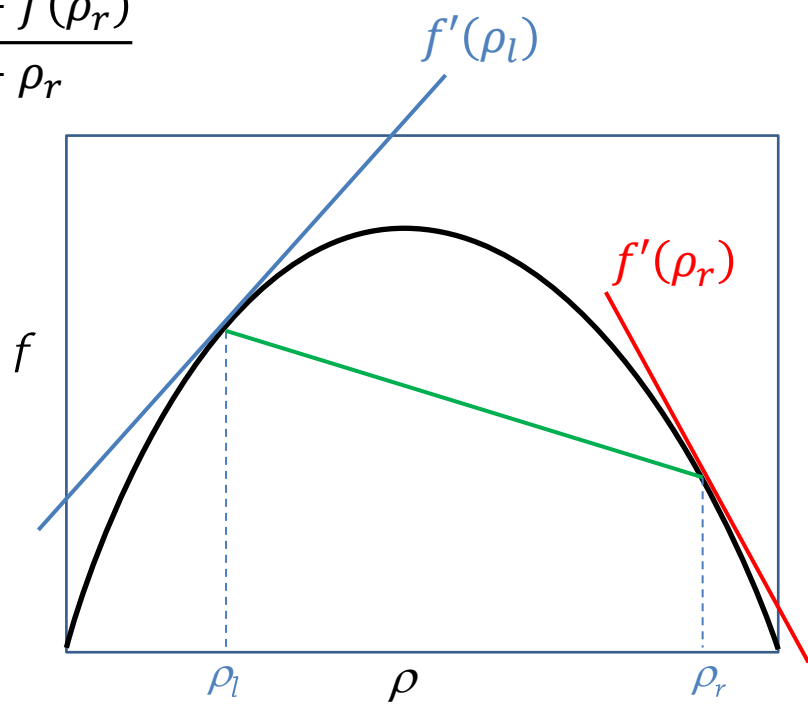
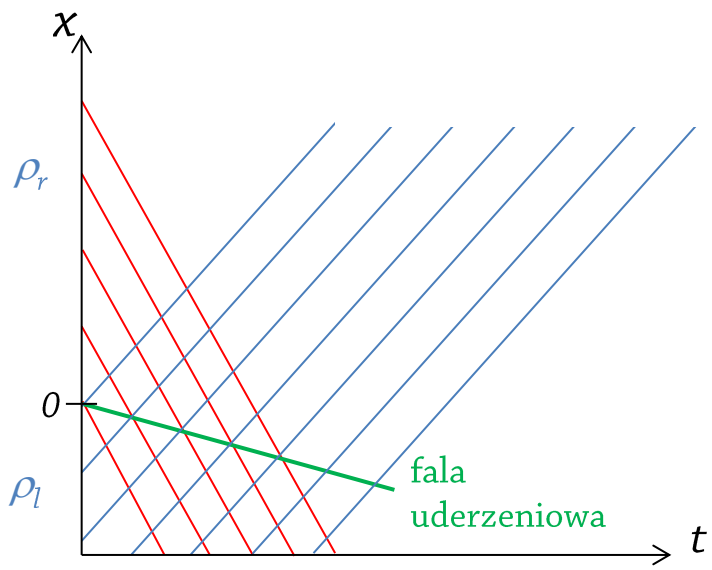
Niech fala uderzeniowa porusza się z prędkością  $v_s$ .



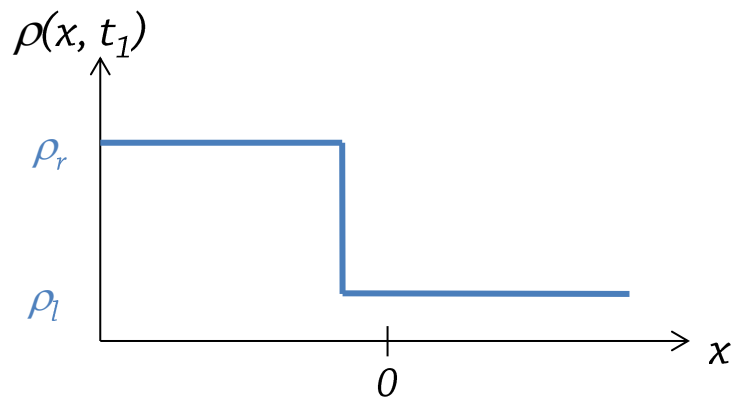
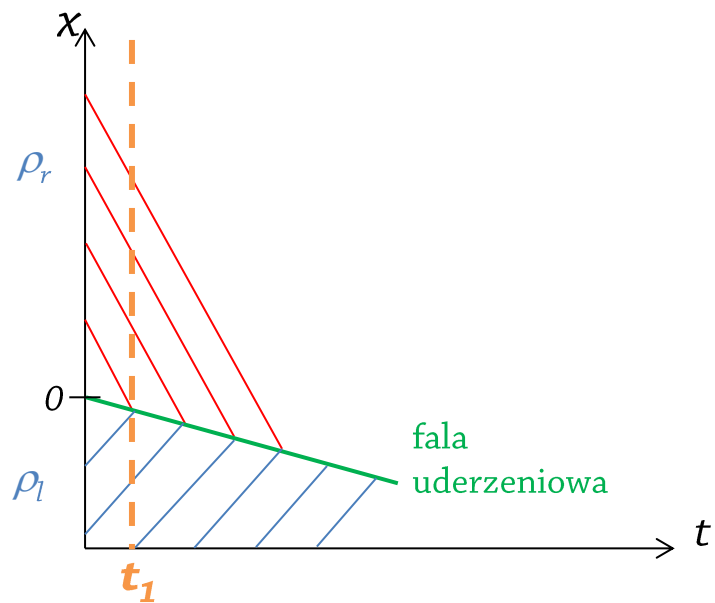
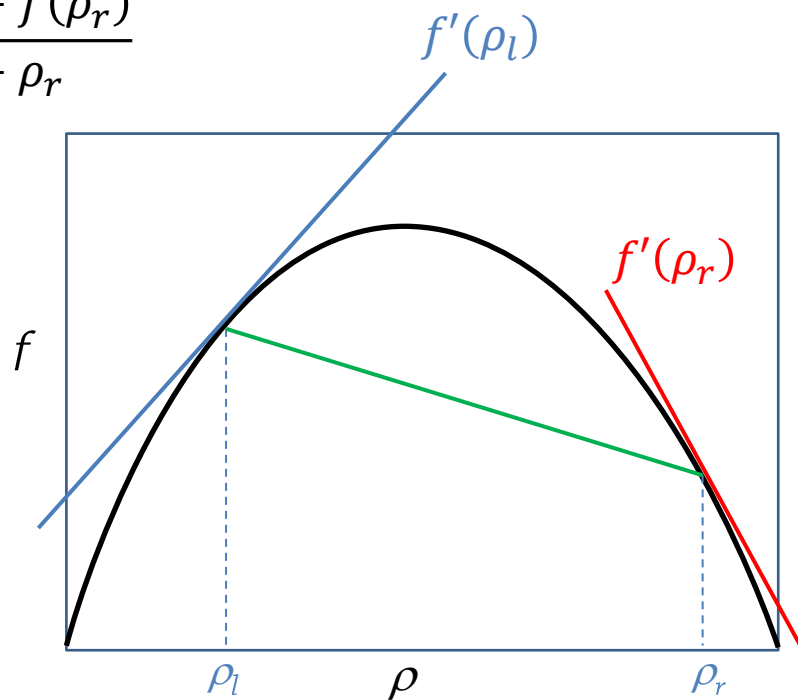
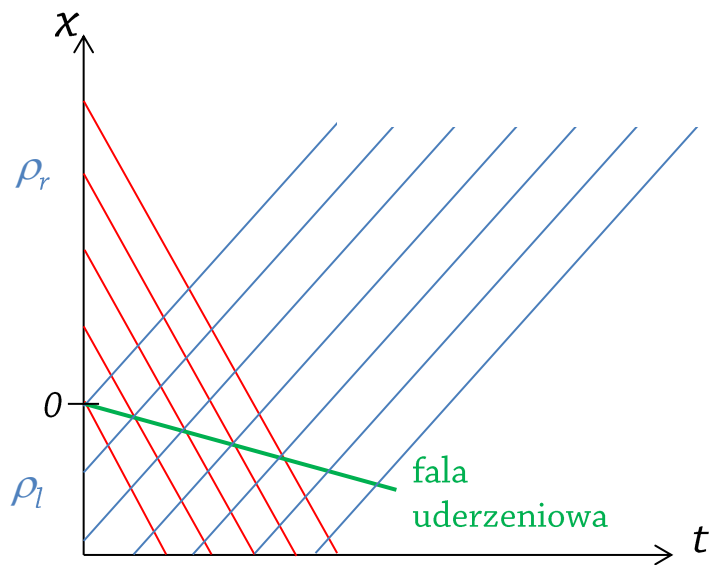
$$f(\rho_l) - v_s \rho_l = f(\rho_r) - v_s \rho_r$$

$$v_s = \frac{f(\rho_l) - f(\rho_r)}{\rho_l - \rho_r}$$

$$v_s = \frac{f(\rho_l) - f(\rho_r)}{\rho_l - \rho_r}$$

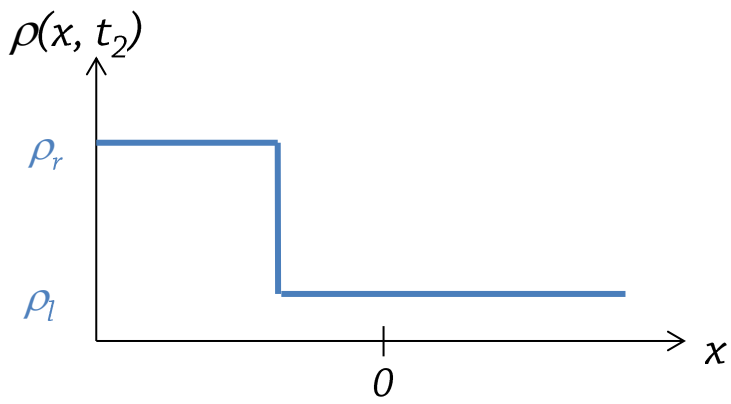
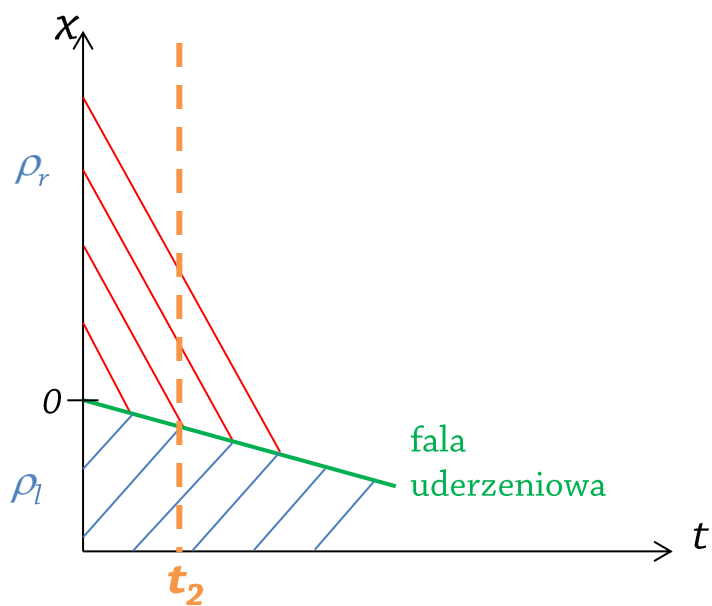
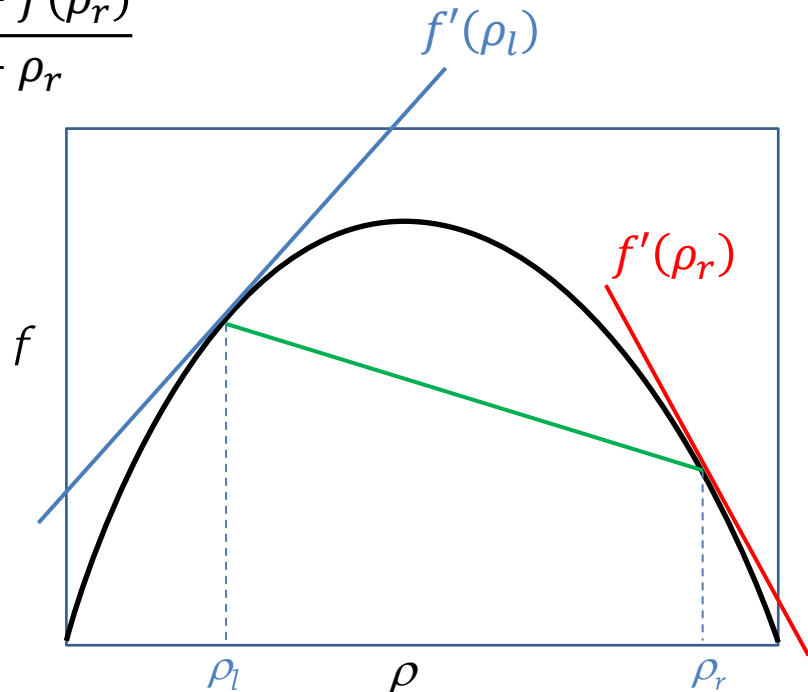
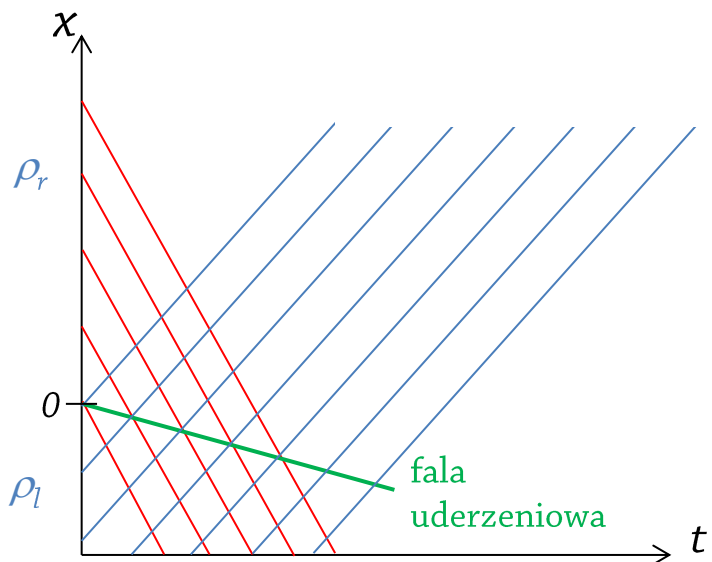


$$v_s = \frac{f(\rho_l) - f(\rho_r)}{\rho_l - \rho_r}$$

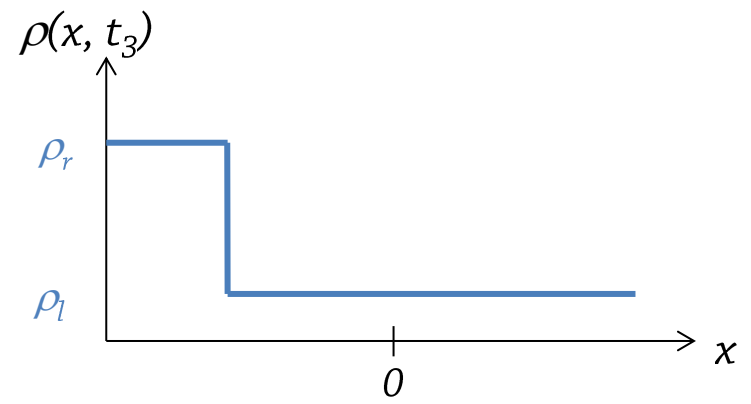
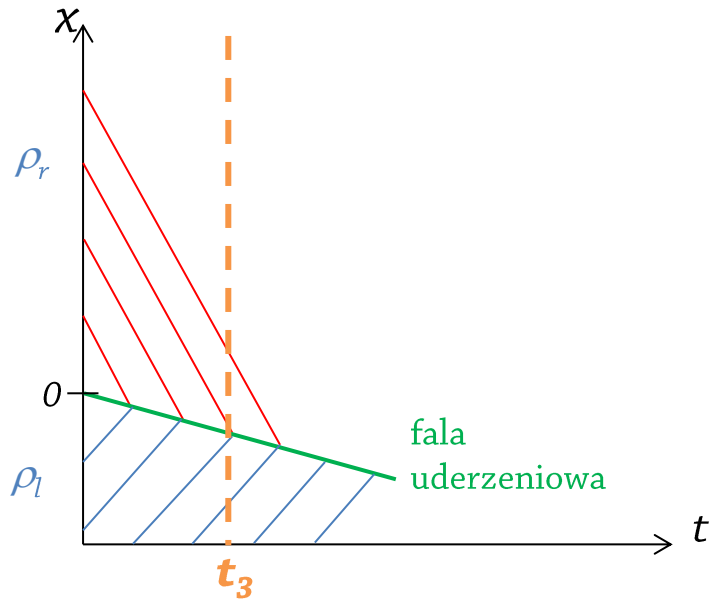
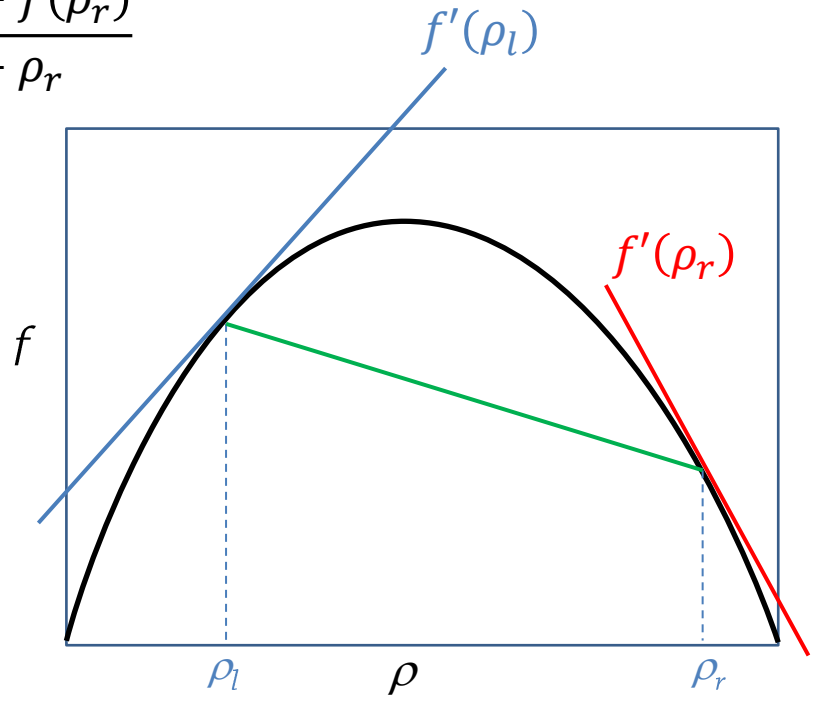
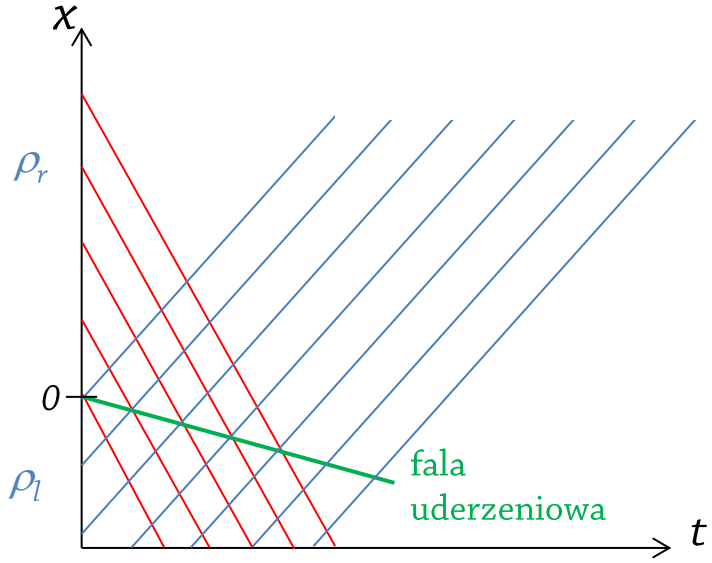




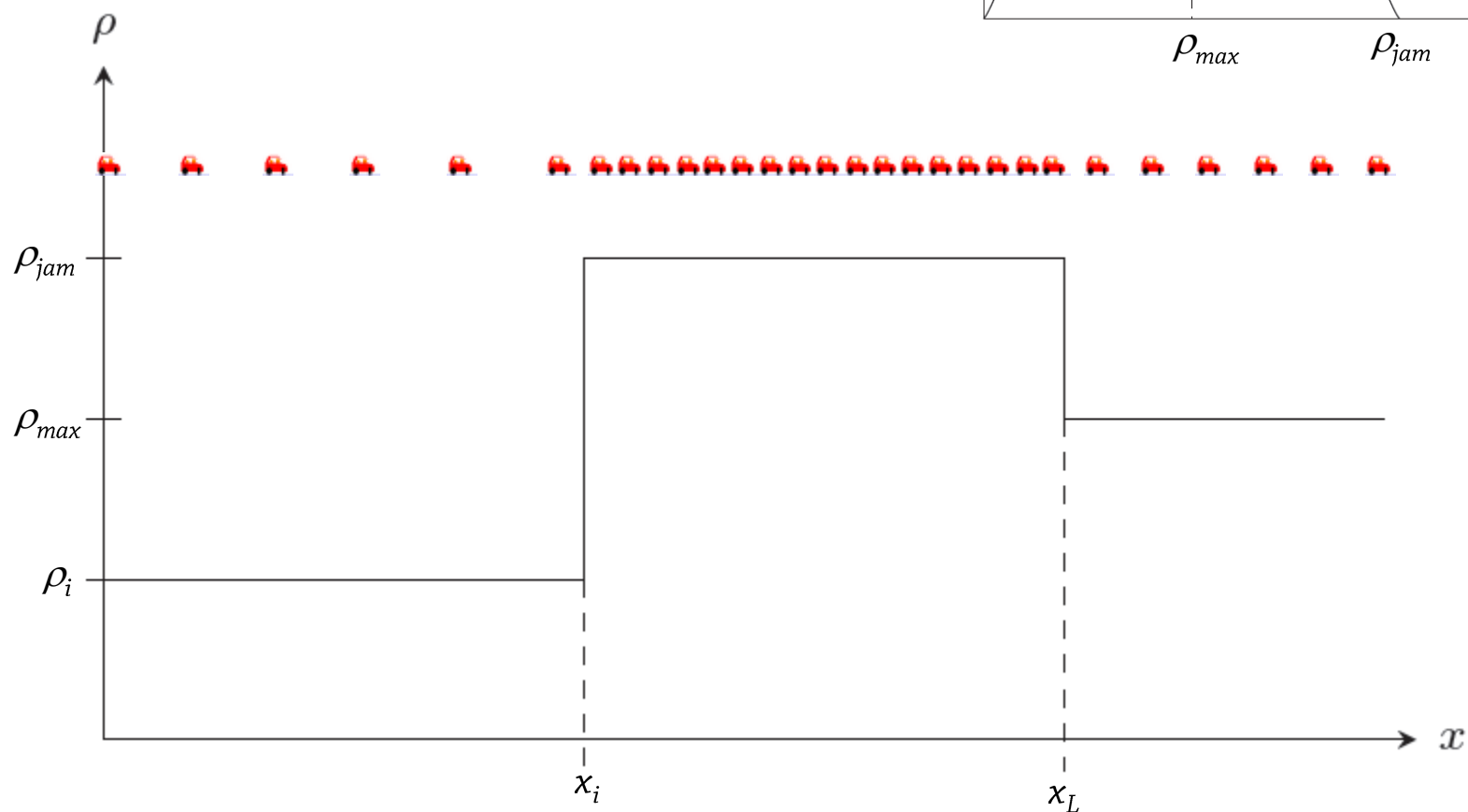
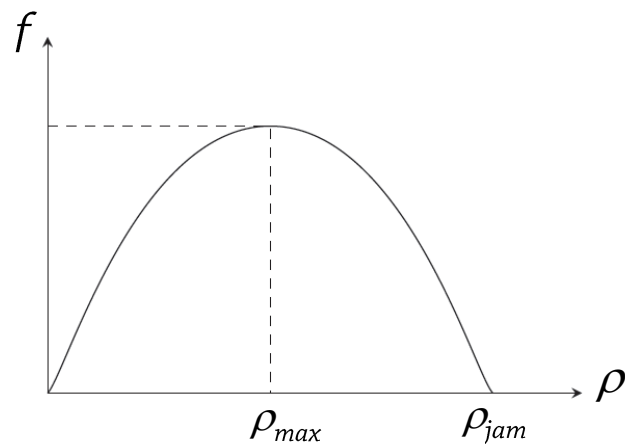
$$v_s = \frac{f(\rho_l) - f(\rho_r)}{\rho_l - \rho_r}$$

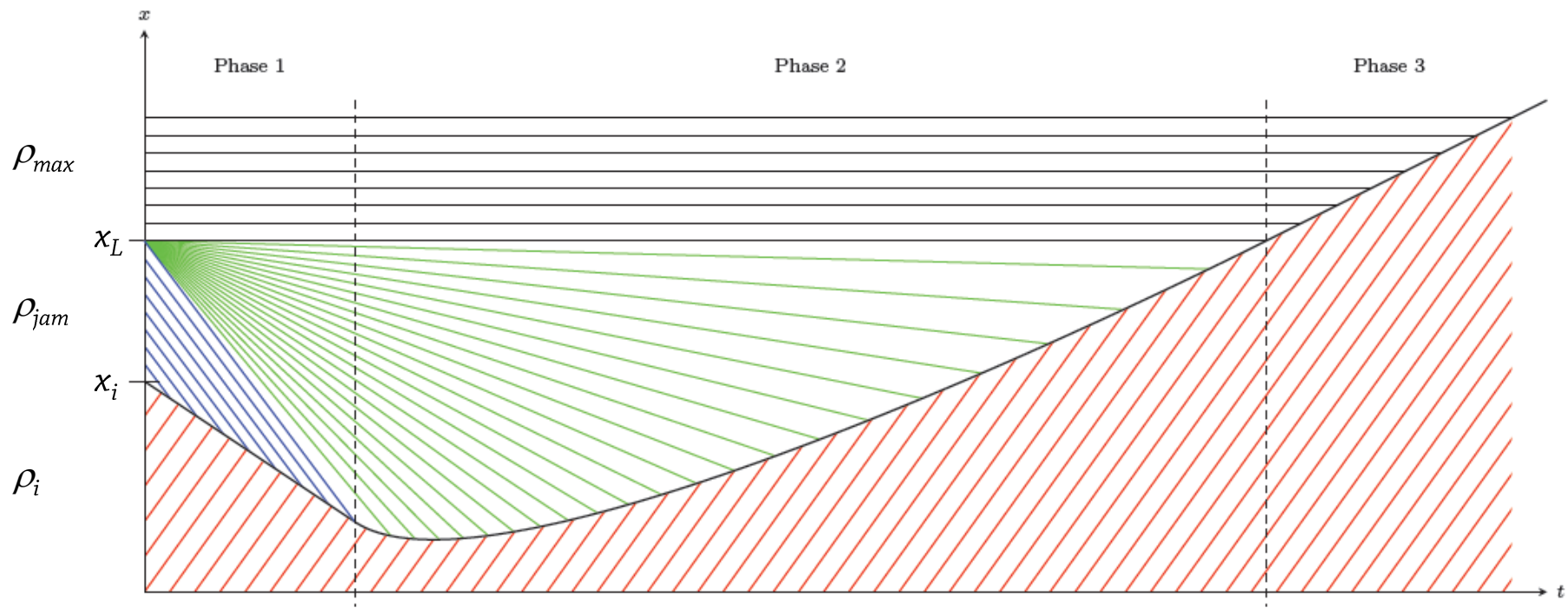


$$v_s = \frac{f(\rho_l) - f(\rho_r)}{\rho_l - \rho_r}$$



# Przypadek III: światła





# Podjęcie mikroskopowe

## **Model Nagela-Schreckenberga – automaty komórkowe**

Cztery reguły:

1. Przyspieszanie

$$v_n = \min(v_n + 1, v_{max})$$

2. Zwalnianie

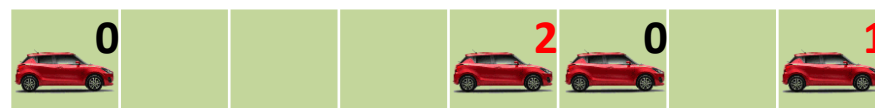
$$v_n = \min(v_n, d_n - 1)$$

3. Losowość

$$v_n = \max(v_n - 1, 0) \text{ z prawdopodob. } p$$

4. Ruch

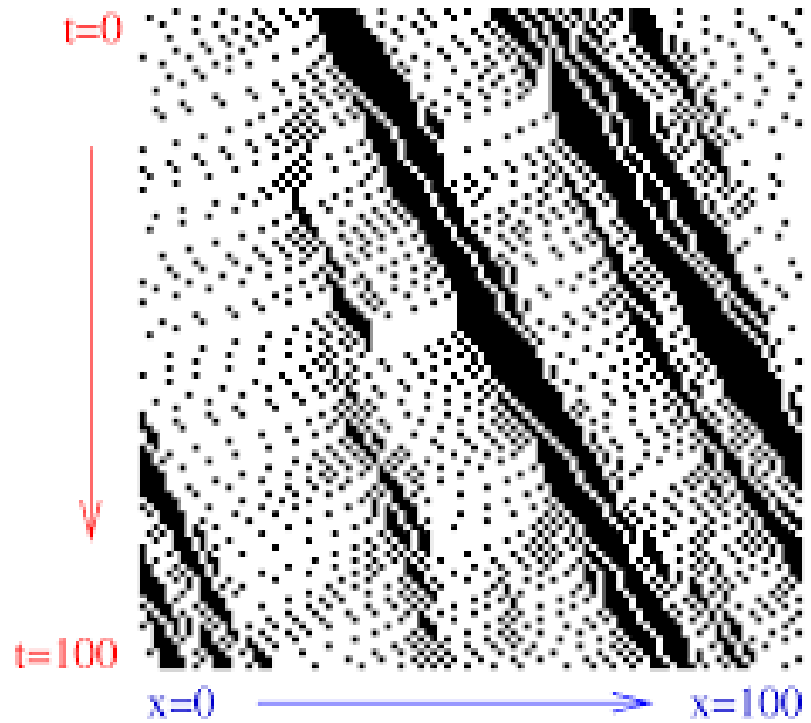
$$x_n = x_n + v_n$$



```

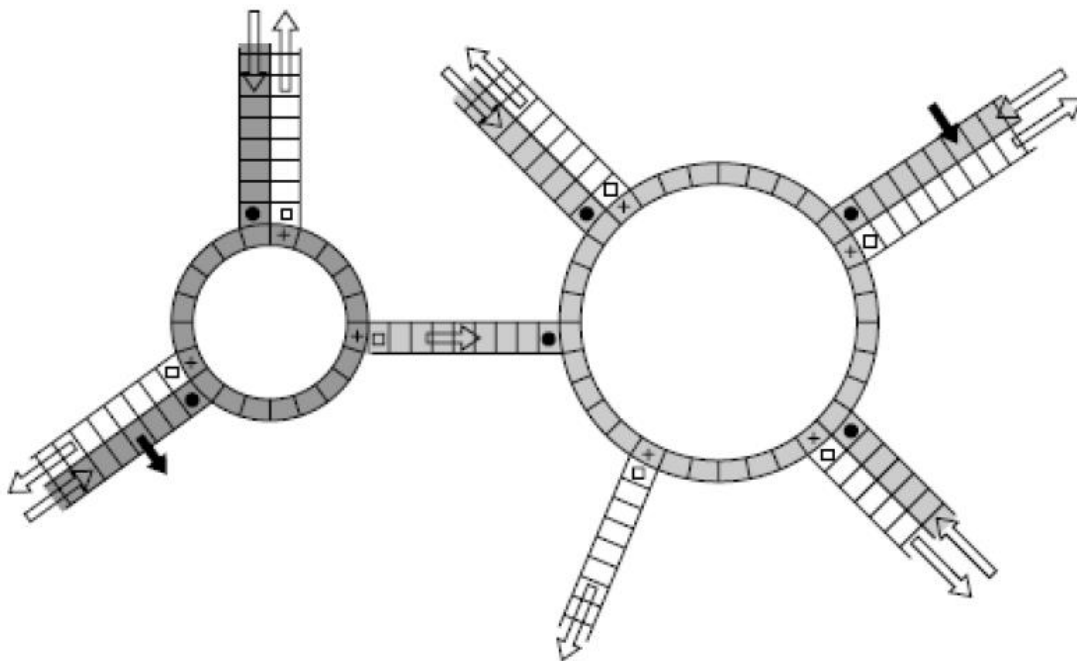
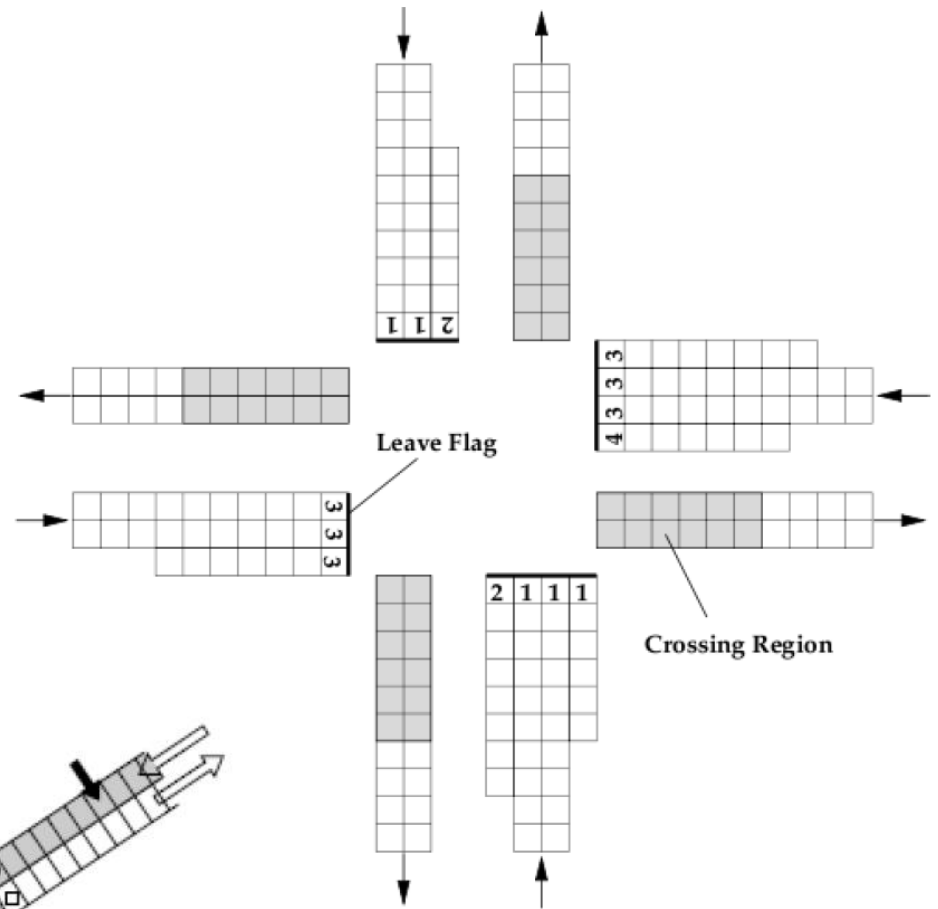
5 . . . . . 5 . . . . . 3 . 1 . 1 0 . . . . 2 . 0 .
. . . . . 5 . . . . . 4 . . . . . 1 . 1 0 . 1 . . . 1 0 .
. . . . . 5 . . . . . 3 . . . . . 1 0 . 1 . 1 . . . 0 0 .
. . . 5 . . . . . 3 . . . . . 2 . 0 0 . . 1 . 1 . 0 . 1
. . . . . 3 . . . . . 2 . . . . . 1 0 . 1 . . 1 . 1 0 . 0
4 . . . . . 3 . . . . . 2 0 0 . . 1 . . 1 0 . 1 .
. . . . . 4 . . . . . 3 . . . . . 0 0 . 1 . . 1 . 0 0 . 0 .
. . . . . 4 . . . . . 2 . . . . . 0 0 . . 1 . . 1 0 . 1 . 1
5 . . . . . 3 . . . . . 1 . 0 . 1 . . 1 . 0 0 . . 1 .
. . . . . 5 . . . . . 2 . . 1 . 1 . 1 . . 1 0 . 1 . . 1
. . . . . 4 . . . . . 2 . 1 . 1 0 . . 0 0 . . 1 . .
. . . . . 3 . . . . . 1 . 1 0 0 . . 0 . 1 . . . 2
. . . . . 2 . . 1 0 0 0 . . 0 . . . 2 . 0
. . . . . 5 . . . . . 2 0 0 0 0 . . . 1 . . . 1 .
. . . . . 5 . . . . . 0 0 0 0 . 1 . . . 1 . . . 0
. 5 . . . . . 3 . . . . . 0 0 0 . 1 . 1 . . . 1 . . 0
. . . . . 5 . . . . . 1 . . 0 0 0 . . 1 . 1 . . . 1 . .
5 . . . . . 3 . . . . . 1 . 0 0 . 1 . . 1 . 1 . . . 1 .
. . . . . 4 . . . . . 2 . . . 1 0 0 . . 1 . . 1 . 1 . . 0 .
. . . . . 3 . . . . . 1 . . 0 0 . 1 . . 1 . . 1 . 1 . . 1
. . . . . 2 . . 0 . 0 0 . . 1 . . 1 . . 1 . 1 . 0
. . . . . 1 . 0 . . 0 . 1 . . 1 . . 1 . . 1 . 1 .
. . . . . 0 . 0 . . 0 . 0 . . . 1 . . 1 . . 1 . 0
5 . . . . . 0 . 1 . 1 . 1 . 1 . . 1 . 1 . . 1 . 0
. . . 3 . . . . . 1 . . 1 . . 1 . 1 . . 0 . . . 1 . 0 0

```



# Możliwe modyfikacje

Vehicle Types	Occupied Cells	Percentage (%)
Motorcycles (M)	3	2
Personal Vehicles (P)	5	78
Vans and minibuses (V)	7	11
Buses (B)	10	6
Other large vehicles (O)	13	3



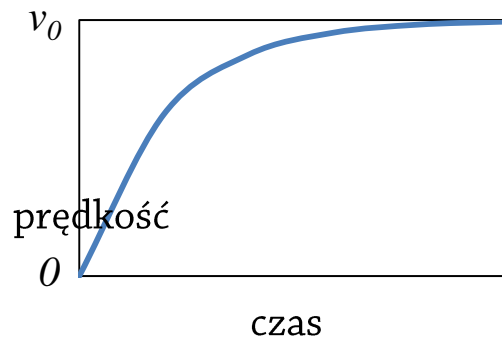
# Podejście mikroskopowe

## **Model inteligentnego kierowcy**



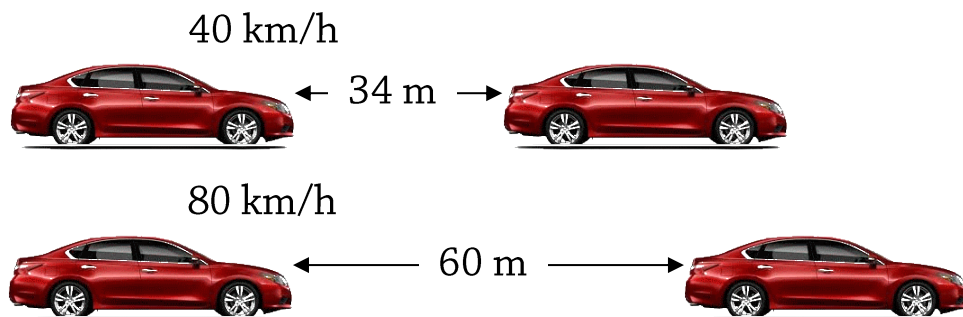
$$m * \vec{a} = \vec{F}_0 \left[ \begin{array}{c} 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^\delta \\ - \left( \frac{s_0}{s} \right)^2 \end{array} \right]$$

### Przyspieszanie swobodne

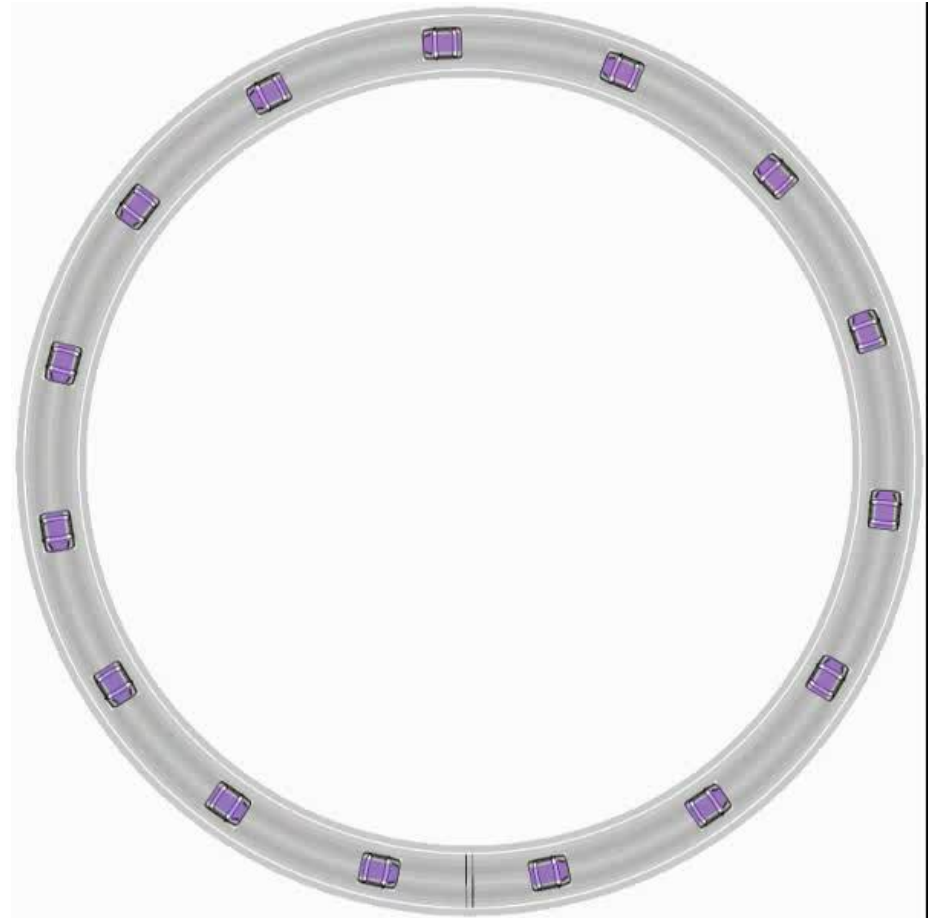
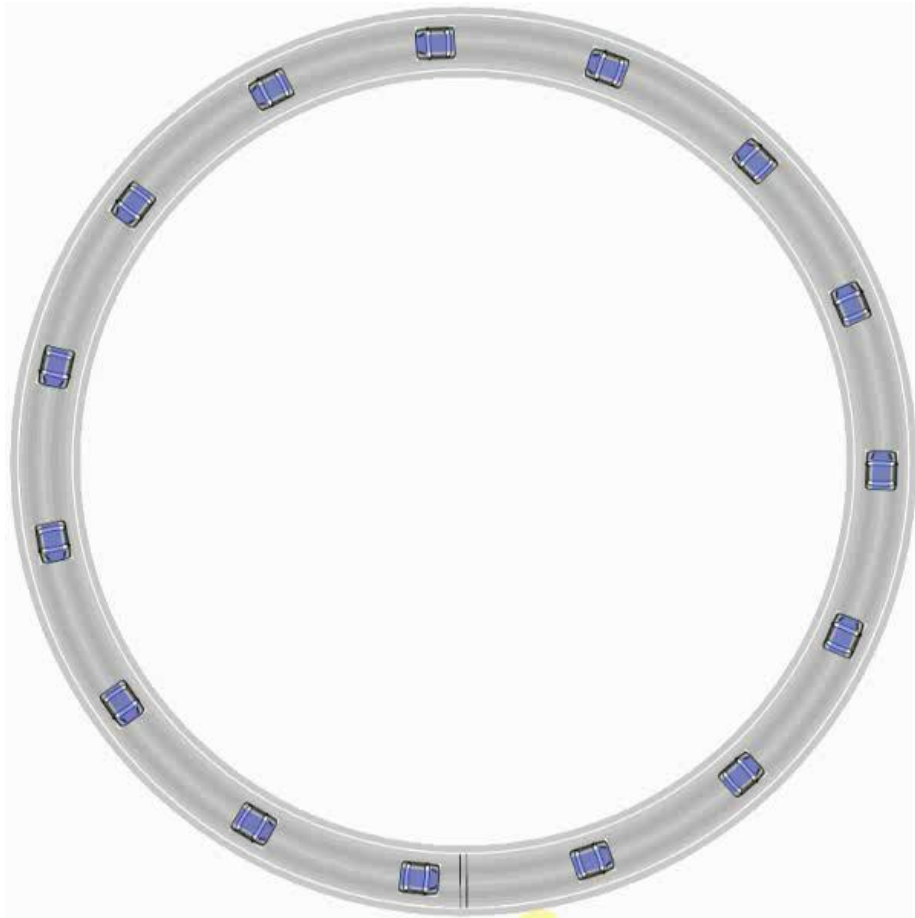


### Hamowanie przed pojazdem

$s_0$  - pożądany odstęp





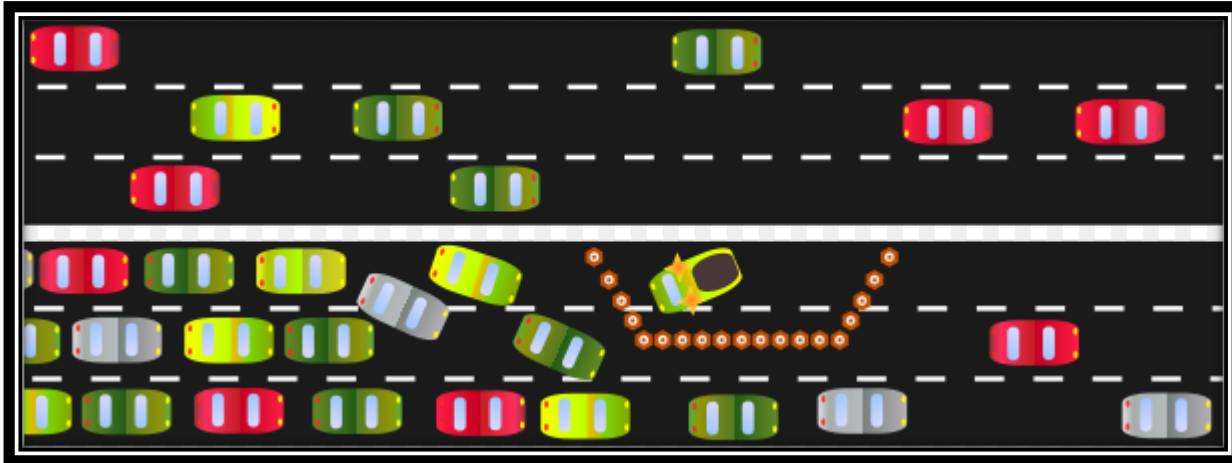




Sugiyama Y, Fukui M, Kikuchi M, Hasebe K, Nakayama A, Nishinari K, Tadaki S and Yukawa S, *New J. Phys.* **10** 033001 (2008)



NSF project: Control of Vehicular Traffic Flow via Low Density Autonomous Vehicles”,CNS-1446435, 1446690, 144602, 1446715



# Paradoks Braessa

Nowy Jork, 2009

Zamknięcie Broadway między 40 i 48 Zachodnią jako innowacyjny sposób walki z zatłoczeniem.

Dane z urządzeń GPS w żółtych taksówkach. 1,1 miliona podróży taksówkami po śródmieściu między Piątą i Dziewiątą Aleją.

Czas podróży w kierunku północnym poprawił się o 17 procent, a podróże w kierunku południowym zwolniły o 2 procent.

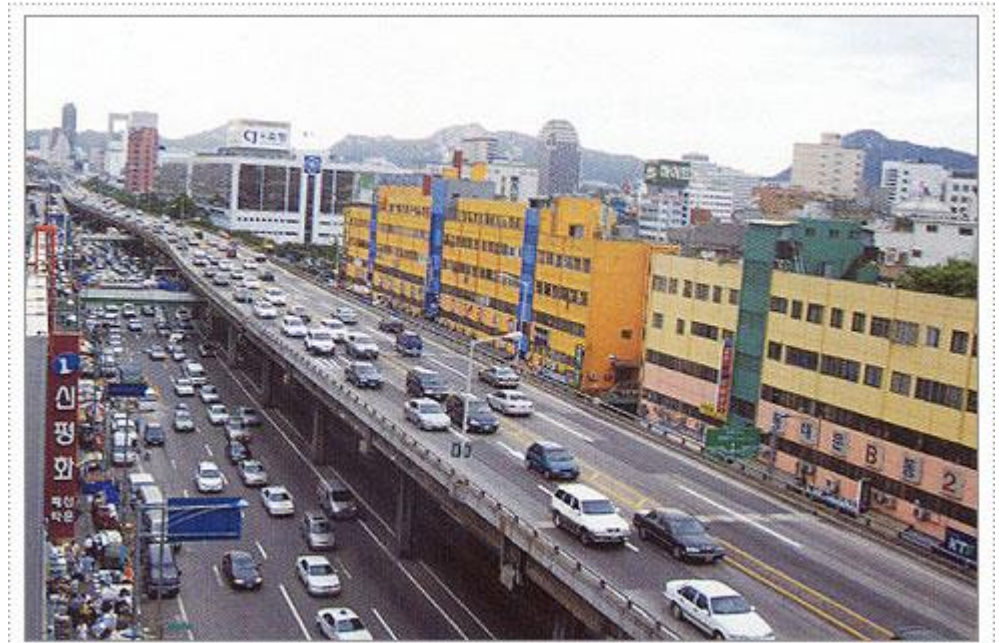


## Paradoks Braessa

Cheonggyecheon Restoration Project  
Seul, 2002

Zamknięcie kluczowej arterii w tym  
rejonie (6 pasów w każdą stronę).

Średni czas podróży w okolicy zmalął.



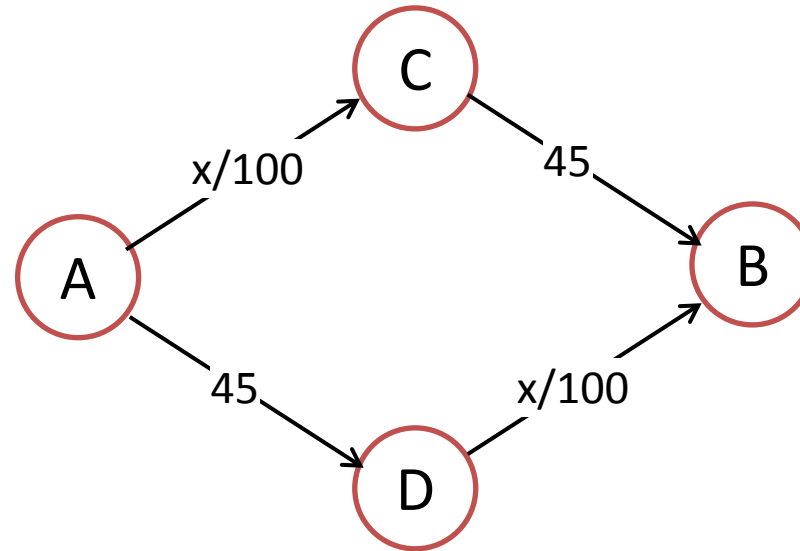
Warszawa, 2015

Pożar pod mostem Łazienkowskim

Dzienny ruch przez Wisłę zmalął  
z 102 000 pojazdów do 50 000.



# Paradoks Braessa



Odcinki A-D i C-B odporne na zatłoczenie (sześciopasmowa autostrada)

Odcinki A-C i D-B bardzo czułe na ruch (wąskie jednopasmówki)

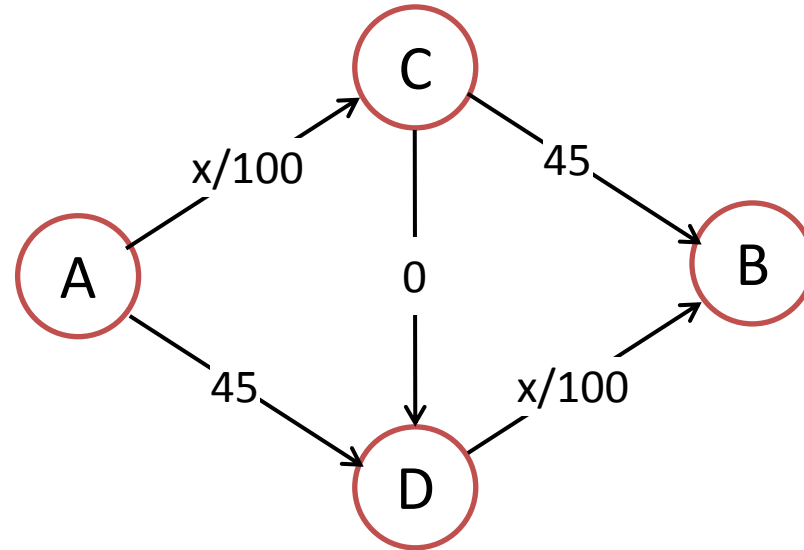
4000 aut chce przejechać rano z A do B

Jeśli każde pojedzie górą, czas podróży wyniesie  $4000/100 + 45 = 85$  minut

Jeśli połowa pojedzie górą a połowa dołem, czas wyniesie  $2000/100 + 45 = 65$  minut

Równowaga Nasha – żaden z kierowców nie zmieni strategii

# Paradoks Braessa



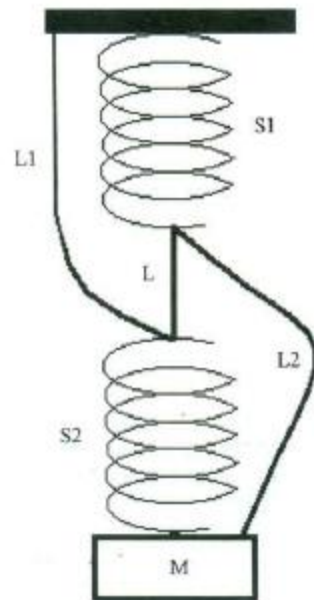
Miasto decyduje się zbudować nowy szybki odcinek C - D.

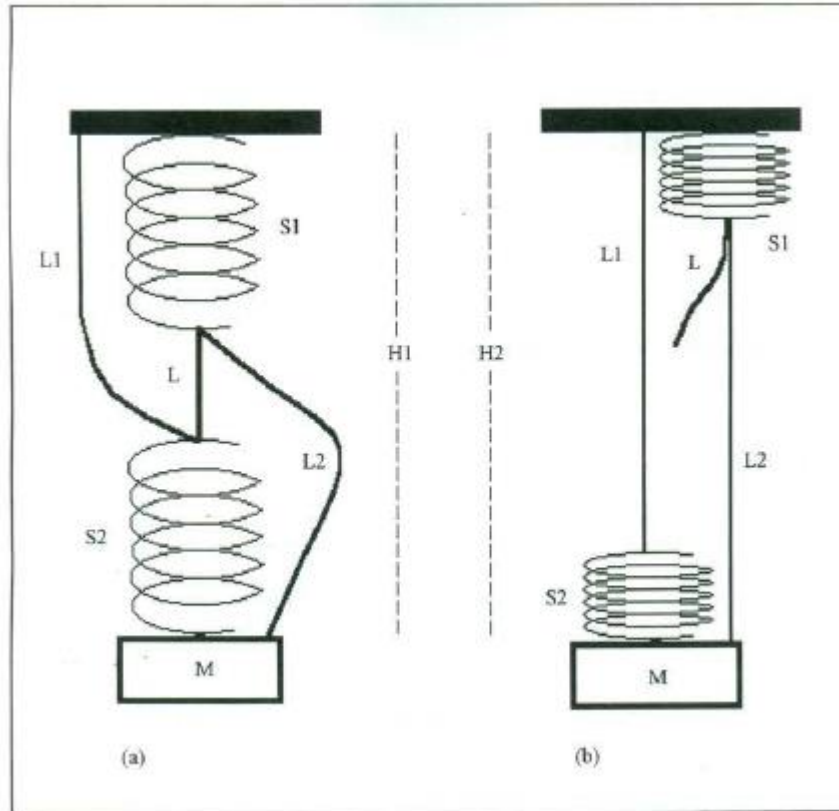
Gdy wszyscy jadą trasą A-C-D-B, czas podróży wynosi  $4000/100 + 4000/100 = 80$  minut

Równowaga Nasha – żaden z kierowców nie zmieni strategii. Zmieniając ją, jedzie  $4000/100 + 45 = 85$  minut

Wniosek: po dodaniu dodatkowej drogi czas wzrósł z 65 do 80 minut







$$F = Mg = kx$$

$$H_1 = L + 2S + 2 \frac{Mg}{k}$$

$$H_2 = L_1 + S + \frac{Mg}{2k}$$

$$H_2 < H_1 \text{ wtedy, gdy } L_1 - L < S + \frac{3Mg}{2k}$$